EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta** ….081*

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(1,2)$, $B(1,a)$, cu $a\in \mathbf{R}$.

(4p) **a)** Să se determine lungimea segmentului *(OA)*.

(4p) **a)** Să se determine ecuația mediatoarei segmentului *(OA)*.

(4p) **c)** Să se determine $a\in \mathbf{R}$ pentru care $OA=OB$.

(4p) **d)** Să se determine ecuația cercului de centru O și rază *OA*.

(2p) **e)** Să se calculeze produsul de numere complexe $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4\cdot i^5\cdot i^6\cdot i^7$.

(2p) **f)** Să se calculeze produsul scalar al vectorilor $\vec{u}=2\cdot\vec{i}-5\cdot\vec{j}$ și $\vec{w}=5\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se determine probabilitatea ca alegând $n\in\{0,1,2,3,4,5\}$ să avem $2^n\le n^2$.

(3p) **b)** Să se determine trei numere reale în progresie aritmetică crescătoare, știind că suma lor este 9, iar produsul lor este 15.

(3p) **c)** Să se rezolve ecuația $\log_4 x=2$, $x\in(0,\infty)$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea $[0,\infty)$ ecuația $\sqrt{x+2}=x$.

(3p) **e)** Să se determine valoarea minimă a funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2-6x+5$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $f(x)=arctg\ x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se demonstreze că funcția f este strict monotonă pe $\mathbf{R}$.

(3p) **c)** Să se determine ecuațiile asimptotelor orizontale ale graficului funcției f.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră grupul S_4 al permutărilor cu 4 elemente şi permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ şi $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $\sigma^2 = \tau^2 = e$.

(4p) **b)** Să se arate că $\sigma^{-1} = \sigma$ şi $\tau^{-1} = \tau$.

(4p) **c)** Să se găsească o permutare $a \in S_4$ pentru care $a^{-1} \neq a$.

(2p) **d)** Să se verifice că $\sigma \cdot \tau \neq \tau \cdot \sigma$.

(2p) **e)** Să se determine numărul de elemente ale mulţimii S_4.

(2p) **f)** Să se arate că permutarea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ este un element de ordinul 4 în grupul S_4.

(2p) **g)** Să se arate că orice submulţime H a lui S_4 care are cel puţin 13 elemente, conţine două permutări u şi v cu proprietatea $u \cdot v \neq v \cdot u$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcţiile $f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sin x}$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$f_n(0) = n$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ şi integralele $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(4p) **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin nx}{\sin x}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(4p) **b)** Să se arate că funcţia f_n este continuă pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(4p) **c)** Să se calculeze integralele I_1 şi I_2.

(2p) **d)** Utilizând formula $\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$, $\forall a, b \in \mathbf{R}$, să se arate că

$I_n - I_{n-2} = \frac{2}{n-1} \cdot \sin \frac{(n-1)\pi}{2}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 3$.

(2p) **e)** Să se arate că $I_{2n-1} = \frac{\pi}{2}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **f)** Să se arate că $I_{2n} = 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}\right)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **g)** Să se arate că $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}\right) = \frac{\pi}{4}$.